工科弹性力学简明版课程教学延伸思考 *

范金洋[1]　杨　帆[2]　姜德义[1]　陈　结[1]　刘　鹏[1]

（1. 重庆大学 煤矿灾害动力学与控制国家重点试验室，重庆　400044；

2. 重庆大学 资源与安全学院，重庆　400044）

摘　要：新时代经济发展和社会需求都在发生着日新月异的变化，教育教学要因应行业的变化进行调整以适应新形势。弹性力学理论与方法是一些工程科学领域解决实践问题和从事科学研究常用的基础性学科。本文从弹性理论表征的实际物理意义出发，对目前工科弹性力学常用的简明版教学的相关理论进行适当维度延伸，以推广其一般形式，实现与工程实践和科研的更好对接。

关键词：弹力力学　延伸

DOI：10.12319/j.issn.2096-1200.2022.29.64

一、引言

《中华人民共和国教育法》中指出，高等教育的任务是培养具有创新精神和实践能力的高级专门人才。创新和实践需要以知识作为基础。弹性力学作为固体力学的重要分支为土木、水利、材料、矿业等工科专业的必修基础性课程，是进一步学习专门性力学课程[1-2]，如岩石力学、土力学、塑性力学等的基础。弹性理论是材料力学、结构力学、塑性力学和某些交叉学科的基础，广泛应用于建筑、机械、化工、航天等工程领域[3-7]。学好弹性力学的相关知识，可以帮助学生构筑完整的力学知识体系，建立起看问题、分析问题的力学思维。由于课程的理论性强，与高等数学的联系较为紧密，经常用到微积分、线性代数的相关知识，知识点相对枯燥抽象，学习具有一定的难度。因此，为了使适应不同的教学和学习要求，在弹性力学课程同时存在两种教学思路，简明教学和普通教学。工科弹性力学课程的教学中，大部分采用的相对简洁的二维平面弹性理论作为教学主体，以介绍弹性力学的基本概念、基本理论和基本解法为主，主要目的是培养学生的处理实际工程问题的能力。其中基本概念包括弹性力学涉及的基本物理量的定义、表示、量纲、方向，基本假设确立的必要性和产生的后果。基本理论主要是通过数学推导过程，科学严谨地建立弹性理论基本方程和相关边界条件的处理方法。基本解法是介绍解弹性力学方程组中常用的集中解析解法，和以常见工程问题为背景的一些基本经典解。整体上，弹性力学简明教学以二维平面问题为主，大大地降低了学生课堂学习的难度。

然而随着近些年就业趋势和经济形势的变化，学生的升学率逐年升高，投入科学研究的比例也越来越高。为科研工作做铺垫的新的教学要求，使得对弹性力学这门课堂教学深度和广度提出了新的需求。科学研究要求对基本问题解答的准确性高，因此，弹性理论中一些在平面二维问题下的假设或基本方程需要进行推广，使得能够在一般三维状态下依然能够成立。

二、平面理论延伸的必要性

工程实践中的问题基本都是三维空间问题，与工科课堂教授的弹性力学简明教学具有一定的理论差异性。为培养学生对实际问题的科学钻研能力，有必要对工科弹性力学简明教学进行改革，不增加学生接受难度的同时能够将三维工程问题的弹性力学本质有必要的阐述，以培养学生解决工程实践问题和从事科学研究的力学素养。

三、弹性力学平面问题的若干延伸思考

（一）弹性力学平面基本方程的延伸

弹性力学基本方程是弹性力学核心与灵魂，为了降低难度，增加可理解性，简明教学中通常以介绍二维平面弹性力学方程为主。平面平衡方程表征的是平面上不同方向上，所受面力和体积力的平衡：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\text{......(1}a\text{)}\\[2mm]\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\text{......(1}b\text{)}\end{cases}$$

* **项目名称：**国家自然科学金重点项目《废弃盐矿溶腔综合利用的基础研究》资助：废弃盐矿溶腔综合利用的基础研究，项目编号：51834003。

如果以数学理解，这样的偏微分方程，容易使学生陷入枯燥难以理解的困惑。从物理意义方面，式（1a）表征的是x方向上正应力变化量$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$加剪应力的变化量$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$（坐标y面上朝x方向的剪力由y方向变化引起的变化量）等于体积力f_x。因此，推广延伸至三维状态应当是考虑z方向上的应力，即x方向上正应力变化量$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$加y面上剪应力的变化量$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$（坐标y面上朝x方向的剪力由y方向变化引起的变化量）加z面上剪应力的变化量$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$等于x方向的体积力$f_x$。即为下式。

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0 ......(2a) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+f_y=0 ......(2b) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+f_z=0 ......(2c) \end{cases}$$

通过以上延伸，学生不仅可以理解相关标号的物理，同时可以利用物理意义自然延伸至三维状态下的平衡方程。几何方程表征位移与应变之间的关系：

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} ....(3a) \\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} ....(3b) \\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} ....(3c) \end{cases}$$

同样，以物理意义理解几何方程的组成。正应变表示的是线段的伸长或缩短，式（3a）即表示x方向的正应变等于x方向上线段的相对变化量$\frac{\partial u}{\partial x}$。式（3c）表示的x、y两个方向上线段的夹角相对变化，即y方向线段向x正轴转动的角度$\frac{\partial v}{\partial x}$加即x方向线段向y正轴转动的角度$\frac{\partial u}{\partial y}$。同理，可以将该思想延伸至三维状态。z方向的正应变等于x方向上线段的相对变化量$\frac{\partial w}{\partial z}$。x、z两个方向上线段的夹角相对变化，即剪应变，为z方向线段向x正轴转动的角度$\frac{\partial w}{\partial x}$加即x方向线段向w正轴转动的角度$\frac{\partial u}{\partial w}$。同理，可得y、z方向两线段段夹角的变化。三维形式的几何方程可以得到，如下式（4）：

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x} ....(4a) \\ \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} ....(4b) \\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} ....(4c) \\ \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} ......(4d) \\ \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} ......(4e) \\ \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} ......(4f) \end{cases}$$

物理方程是通过总结实验规律获得的，表示的是应力与应变之间的关系。各向同性材料有两个独立的材料常数，其关系表示为：

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-u\sigma_y) ....(5a) \\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-u\sigma_x) ....(5b) \\ \gamma_{xy}=\frac{2(1+u)}{E}\tau_{xy} ....(5c) \end{cases}$$

其中弹性模量和泊松比在公式中经常被写错位置。从物理意义的角度理解该式子，不仅可以更精确的掌握公式的意义，同样可以将其推广至三维状态。弹性模量的意义是应力与应变的比值；而泊松比是引起的其他方向上的变形与本方向变形的比值。式（5a）可以理解为x方向上的正应变等于x方向上的应力引起的变形$\frac{\sigma_x}{E}$减去其他方向的应力在该方向上产生的变形$\frac{u\sigma_y}{E}$。式（5c）即剪应变与剪应力的关系，一般认为剪应力只能引起剪应变，因此三维状态下不发生变化。由二维状态下的物理方程经过延伸可以得到三维物理方程。x方向上的正应变就还需要考虑z方向应力引起的应变，即等于x方向上的应力引起的变形$\frac{\sigma_x}{E}$减去其他方向的应力在该方向上产生的变形$\frac{u\sigma_y}{E}$，再减去其他方向的应力在该方向上产生的变形$\frac{u\sigma_z}{E}$，如式（6a）所示。

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-u\sigma_z-u\sigma_z) ....(6a) \\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-u\sigma_x-u\sigma_z) ....(6b) \\ \varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-u\sigma_x-u\sigma_y) ....(6c) \\ \gamma_{xy}=\frac{2(1+u)}{E}\tau_{xy} ....(6d) \\ \gamma_{zx}=\frac{2(1+u)}{E}\tau_{zx} ....(6d) \\ \gamma_{yz}=\frac{2(1+u)}{E}\tau_{yz} ....(6d) \end{cases}$$

（二）弹性力学二维边界条件的延伸

边界条件分为位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件。通常位移边界条件即位移约束，约定某位置范围的位移为零。应力边界条件的形式为：

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} = \overline{f_x} \text{............}(7b) \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} = \overline{f_y} \text{..........}(7b) \end{cases}$$

式（7a）表示的是x方向的内力等于面力在该方向上的分量$\overline{f_x}$，内力通过方向余弦（l，m）与应力的乘积计算。如果延伸至三维空间。外力的形式不变，内力的计算需要考虑z面上朝x方向的分力。可以表示如式（8）所示：

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = \overline{f} \text{............}(8a) \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = \overline{f_y} \text{............}(8b) \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = \overline{f_z} \text{............}(8b) \end{cases}$$

通过对上述弹性力学基本理论的延伸，可以发现，从物理意义角度去理解弹性力学理论的二维和三维形式是相通的。这样可以帮助简明教学中学生在学习弹性力学时，能够融会贯通，从而加深理解[8]。

（三）弹性力学解法案例的延伸

在完成弹性力学基本概念和基本理论后，通常需要介绍弹性力学常用的几种经典解法，如直接坐标系下的简支梁纯弯曲问题、楔形体受重力和液体压力问题，极坐标系下圆环圆筒受均布力、孔口应力集中问题、半平面体受集中荷载作用。这些经典解法分别对应了实际大量实际工程中的问题。然而在常见的案例中仍然缺乏必要的经典解，需要课堂中补充介绍，以增加学生对力学与工程之间联系紧密性的理解[9]。

受集中或均布荷载的悬臂梁问题。这类问题也是工程学科常见的问题，如土木工程常见的窗门等悬挑结构，为悬臂梁受端部集中荷载的作用，矿业工程中回采工作面的顶板为悬臂梁受顶部分布荷载的作用[10]。

椭圆形孔的应力集中问题，常见的地下工程硐室几乎没有标准的圆形，椭圆形、多心拱形、直墙拱形。通过了解椭圆形孔的应力集中情况，可以增加对工程结构适应地应力条件的理解。

常见的常规力学试验解，如巴西圆盘劈裂实验的弹性力学解、圆柱试样三轴加载的弹性力学解。巴西圆盘劈裂实验不仅需要用到弹性力学的叠加原理，同时还要求转变思维，理解等效原理。三轴加载时用到圆环问题的解，需要有开放性的思维，考虑解的有界性，从而使教学与工程更加接近。

四、结语

新时代下学科教学，尤其研究型高校，面临着新的变化与改革，学生的升学率越来越高、从事科学研究的比例在逐年增加，对课程知识学习的要求逐步增高。弹性力学理论和方法对解决工程科学问题和从事科学研究至关重要，但是由于其理论深度大，使得教师教学与学生学习的难度相对较大。对于工科教育中被采用弹性力学简明教学的学生而言，理解三维空间中的弹性理论，是解决一般特征问题或应对未来科学研究的基础。本文从物理意义的角度入手，将平面问题的弹性力学基本理论延伸至三维空间中的一般状态。同时基于经典弹性力学基本解法，对传统案例进行延伸、对比，发现工程与力学之间的联系与差异，可以便于学生学习的融会贯通。

参考文献

[1]董春亮,卢小雨,经来旺.采矿工程专业弹性力学教学实践初探[J].黑龙江科技信息,2013(31):43.

[2]郭晓菊.基于课程论文的弹性力学课程教学方法探究[J].教育教学论坛,2021(12):145-148.

[3]刘计良,许萍,曹靖等.专业认证背景下水利水电工程专业“弹性力学”教学模式研究[J].科教导刊(上旬刊),2020(31):139-141.

[4]范金洋,姜德义,欧阳振华等.基于塑性应变梯度理论的材料失稳型冲击地压触发判据[J].煤炭学报,2018,43(11):2959-2966.

[5]姜德义,范金洋,陈结,杨春和,崔遥.间歇疲劳试验对盐岩疲劳特性的影响[J].岩土工程学报,2016,38(07):1181-1186.

[6]朱力,刘萌,卢文良.基于工程实际的弹性力学教学改革的探索与实践[J].科学大众(科学教育),2019(11):159,183.

[7]朱前坤,张琼,杜永峰等.可视化在弹性力学教学中的探索与实践[J].教育现代化,2019,6(78):136-137.

[8]刘学文,王旭,罗素云.新工科视角下拔尖人才培养的探索与实践——以弹性力学有限单元法理论及工程应用课程为例[J].高教学刊,2019(06):140-142.

[9]颜世军,彭剑,尹博渊.新工科下提高弹性力学课程教学效果的探索和实践[J].亚太教育,2021(13):86-87.

[10]武杰.高校弹性力学课程教学中学生学习和研究兴趣培养初探[J].科教导刊,2022(6):82-84.